

## ПЛАН УЧЕБНОГО ЗАНЯТИЯ

### по дисциплине «Математика»

дата **09.11.24**

*Уважаемые, студенты! Домашнее задание было найти все алгебраические дополнения определителя. Проверьте, пожалуйста, свои решения.*

Найти алгебраические дополнения определителя  $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix}$ .

Решение.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4 - (-20)) = 4 + 20 = 24;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2 - 0) = (-1) \cdot (-2) = 2;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4 - 0) = 4;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (2 - (-8)) = (-1) \cdot 10 = -10;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (6 - 0) = 6;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-12 - 0) = 12;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (5 - 4) = 1;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (15 - (-2)) = (-1) \cdot 17 = -17;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (6 - (-1)) = 7.$$

**Затем продолжаем конспект прошлого урока**

**Новый материал (конспект в рабочую тетрадь!!!)**

**Теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца**

*Сумма произведений элементов любой строки (или столбца) определителя  $\Delta$  на соответствующие им алгебраические дополнения равна этому определителю  $\Delta$ .*

Пример: вычислить определитель  $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -3 & 7 & 5 \end{vmatrix}$  разложением по элементам первой строки

Решение.

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -3 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - (-5) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 5 + 5 \cdot 1 \cdot 5 + 3 \cdot (7 + 12) = 122$$

### Обратная матрица

Квадратная матрица называется *вырожденной*, если ее определитель равен нулю, и *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля.

Пусть  $A$  – квадратная матрица.

Обратной к матрице  $A$  называется матрица  $A^{-1}$ , которая удовлетворяет условию

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Если обратная матрица к матрице  $A$  существует, то матрица  $A$  называется *обратимой*. Операция нахождения обратной матрицы при условии, что она существует, называется обращением матрицы.

Для вычисления обратной матрицы используют следующий алгоритм:

1. Находим определитель матрицы и убеждаемся, что он отличен от нуля.
2. Находим алгебраические дополнения к элементам матрицы и записываем новую матрицу.
3. Меняем местами столбцы полученной матрицы (транспонируем матрицу).
4. Умножаем полученную матрицу на  $\frac{1}{\Delta}$
5. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы, используя определение  $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ .

*Пример:*

Найти матрицу, обратную данной и сделать проверку:  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Решение.

- 1) Находим определитель матрицы:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 3 - 5 \cdot (-2) \cdot 0 = 16$$

Т.к.  $\Delta \neq 0$ , то матрица  $A^{-1}$  существует

- 2) Находим алгебраические дополнения элементов матрицы  $A$ :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 5 \cdot (-2) = 16 \qquad A_{23} = - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -(0 \cdot 5 - 1 \cdot (-1)) = -1$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 3 - 1 \cdot (-2)) = -8 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2) - 2 \cdot 1 = 0$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 2 = 8 \qquad A_{32} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(0 \cdot (-2) - 2 \cdot 1) = 2$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -((-1) \cdot 3 - 5 \cdot 1) = 8 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) = 2$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = -1$$

Запишем новую матрицу

$$\begin{pmatrix} 16 & -8 & 8 \\ 8 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3) Транспонируем

$$\begin{pmatrix} 16 & 8 & 0 \\ -8 & -1 & -2 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4) Умножаем полученную матрицу на  $\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{16}$

Тогда, матрица обратная данной A, равна  $A^{-1} = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 8 & 0 \\ -8 & -1 & -2 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

5) Проводим проверку по определению:  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ .

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A &= \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 8 & 0 \\ -8 & -1 & -2 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 16 \cdot 0 + 8 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 16 \cdot (-1) + 8 \cdot 2 + 0 \cdot 5 & 16 \cdot 1 + 8 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 \\ -8 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 1 & -8 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 5 & -8 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \\ 8 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 8 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 5 & 8 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Проверка показала, что обратная матрица найдена верно.

Ответ:  $A^{-1} = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 8 & 0 \\ -8 & -1 & -2 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Конспект отправляем на электронную почту [oles.udalova@yandex.ru](mailto:oles.udalova@yandex.ru)